速さ測定器を用いて，力学的エネルギー保存を実感します

振り子の運動で調べよう

位置エネルギーや運動エネルギーの大きさの定性的な説明には，モールなどで斜面をつくり，金属球と木片を用います。エネルギーの移り変わりについても，物体が斜面を下るにしたがって物体の高さが減少することから位置エネルギーがしだいに減少し，また，物体の速さの増加から運動エネルギーがしだいに増加することが分かります。ところが，力学的エネルギー保存の法則を，斜面上の物体の運動を用いて定量的に説明しようとすると，物体の転がりや摩擦があるため，実験では誤差が大きくなってしまいます。そこで，振り子の運動から，力学的エネルギー保存則について定量的に考えてみます。

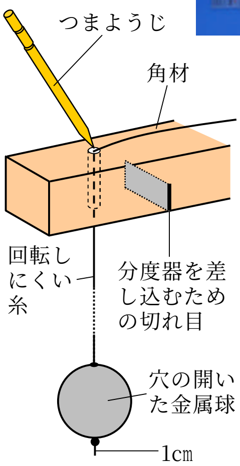
1　速さ測定器を用いて，つり合いの位置での物体の速さを測定する実験

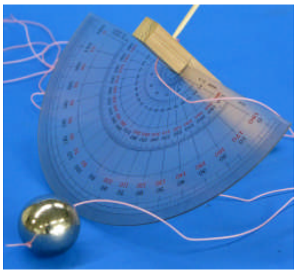
⑴　準備するもの

角材　１㎝×１㎝×10㎝　つまようじ
穴あき金属球（直径30㎜　穴径２㎜程度）
回転しにくい糸（測量などで使用する下振用糸）２ｍ
速さ測定器
分度器，定規，スタンド，両面テープ

⑵　工作の手順

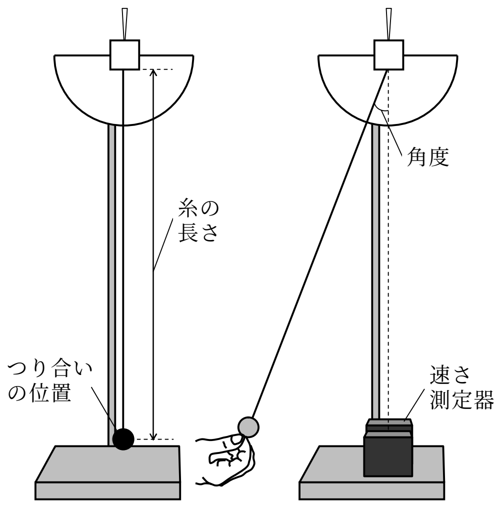
①　糸を通すための穴を角材に開ける。（穴が大きいと支点がずれるので，φ1.5㎜程度の穴。糸はつまようじで固定する。）
②　支点と分度器の０゜を合わせるために，角材に切れ目を入れる。
③　金属球に糸を通し，金属球から１㎝程度糸を残す。





⑶　セッティング　右図

①　分度器と金属球を組み合わせた角材をスタンドに取り付ける。
②　おもりをつるして，つり合いの位置での糸の長さが50～60㎝程度になるようにして，支点から重心までの正確な距離を測定する。（糸の長さが短いと，測定器の速さを検知するセンサーを通過しないことがある。）
③　つり合いの位置と速さ測定器の中央部が一致するように，速さ測定器を置く。
④　正面から金属球をはなすときの角度を読み，側面から，金属球が速さ測定器を通過できる軌道を確認する。（２人で実験を行うとよい。）



⑷　実験上の注意

①　分度器が曲がっていないか。つり合いの位置と分度器の関係が正しいか。

②　糸の長さが変化していないか。

③　速さ測定器の中心が，つり合いの位置にあるか。

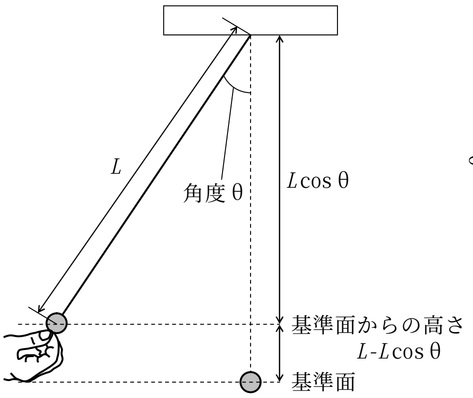
⑸　実験と実験結果

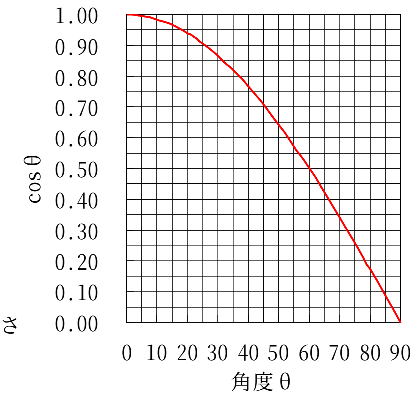
金属球をはなすときの鉛直方向となす角度θを変えたときの，金属球が速さ測定器を通過した速さを測定する。

①　図のように，金属球をはなすときの糸が鉛直方向となす角度をθとすると，このときの基準面からの高さは，

$$L(1-\cos\theta)$$

で表される。





例えば，支点から金属球の重心までの長さ L を0.5732[m]，角度を60°とすると，基準面からの高さは，右図のグラフを用いて

$$L(1-\cos 60^\circ) = 0.5732 \times (1-0.50) = 0.2866$$

となる。

②　右の表は，提案した方法で実験した結果を表したものである。このとき，測定は５回行った。また，平均値は，最低値と最高値は除いて計算した。

③　50°55°は省略し，基準面からの高さが糸の長さの半分になる60°を実験した。

角度(°)	基準面からの高さ(m)	測定1	測定2	測定3	測定4	測定5	平均値(km/h)
5	0.00218	0.73	0.69	0.71	0.72	0.75	0.72
10	0.00871	1.37	1.41	1.40	1.47	1.47	1.43
15	0.0195	2.13	2.23	2.15	2.15	2.17	2.16
20	0.0346	2.84	2.62	2.89	2.90	2.91	2.88
25	0.0537	3.64	3.62	3.60	3.63	3.63	3.63
30	0.0768	4.25	4.23	4.07	4.25	4.26	4.24
35	0.104	5.05	5.02	5.04	5.08	5.06	5.05
40	0.134	5.70	5.72	5.70	5.71	5.70	5.70
45	0.168	6.42	6.34	6.45	6.42	6.40	6.41
50	0.205						
55	0.244						
60	0.287	8.35	8.33	8.39	8.33	8.40	8.36

⑹　速さの２乗と基準面からの高さとの関係

摩擦や空気抵抗などがない場合，力学的エネルギー保存則より，

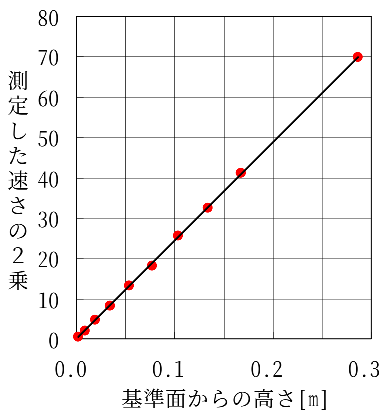
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad g：重力加速度 \quad m：金属球の質量$$

$$v^2 = 2gh$$

$$v^2 = kh \quad k：比例定数$$

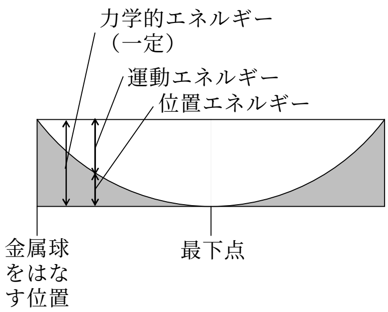
である。実験結果から，速さの２乗は金属球をはなすときの基準面からの高さに比例するかどうかを調べた。

右図は，速さの２乗と基準面からの高さとの関係を表したものである。ほぼ原点を通る直線で表すことができるので，比例することが分かる。



⑺　振り子の運動における力学的エネルギー保存則について

教科書で力学的エネルギー保存則を扱う場合，振り子の運動が取り上げられている。ここでは，速さ測定器で測定した速さと，力学的エネルギー保存則における速さの理論値との誤差について表計算ソフトを用いて調べてみた。



金属球がはじめにもっていた位置エネルギー

＝　最下点の運動エネルギー

$$mgL(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv^2$$

$$v\ =\sqrt{2gL(1-\cos\theta)}=\text{理論値}$$

$$\text{誤差}=\frac{|\text{理論値}-\text{実験値}|}{\text{理論値}}\times 100$$

①　表計算ソフトの入力例

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	9.797	重力加速度						
2	0.5732	支点から重心までの距離						
3								
4	角度	余弦	基準面からの高さ	速さの２乗	速さ	理論値	実験値	誤差
5	θ（°）	cosθ	H(m)		v(m/s)	v(km/h)	(km/h)	(%)
6	5	0.9962	0.00218	0.0427	0.207	0.744	0.720	3.26
7	10	0.9848	0.00871	0.171	0.413	1.49	1.43	4.06
8	15	0.9659	0.0195	0.383	0.619	2.23	2.16	3.16
9	20	0.9397	0.0346	0.677	0.823	2.96	2.88	2.91
10	25	0.9063	0.0537	1.05	1.03	3.69	3.63	1.70
11	30	0.8660	0.0768	1.50	1.23	4.42	4.24	3.91
12	35	0.8192	0.104	2.03	1.43	5.13	5.05	1.57
13	40	0.7660	0.134	2.63	1.62	5.84	5.70	2.27
14	45	0.7071	0.168	3.29	1.81	6.53	6.41	1.78
15	50	0.6428	0.205	4.01	2.00	7.21		
16	55	0.5736	0.244	4.79	2.19	7.88		
17	60	0.5000	0.287	5.62	2.37	8.53	8.36	2.00

=COS(PI()*A17/180)　=A2*(1-B17)

=2*A1*C17

=D17^(1/2)　=E17*3600/1000

=ABS(F17-G17)*100/F17

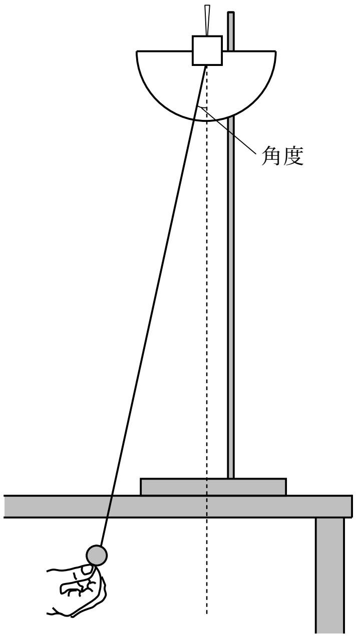
②　考察

どの角度においても，速さの誤差が５%以内であるので，力学的エネルギー保存則がおおむね成り立っていることが分かる。

実験値が理論値よりもすべて下回っている。これは，速さ測定器に物体の通過を確認する赤外線のセンサー部が２か所あるが，このセンサーが４cm程度はなれているため，最下点での速さではなく，最下点付近での速さになることが考えられる。また，空気抵抗なども考えられる。

2　単振り子の周期から重力加速度の大きさを求める実験(発展)

発展的な内容として，記録タイマーを用いて，物体を自由落下させたときの速さの変化を調べる実験が紹介されている。このとき，記録されたテープを切ってグラフをつくり，グラフの傾きを調べると，重力加速度を測定することができる。ここでは，先ほど紹介した実験器具を用いて，重力加速度を測定する。



⑴　セッティング

① 図のようにおもりをつるしてつり合いの位置で糸の長さ支点から重心までの距離）を測定する。

② 糸の長さは１ｍにする。

③ おもりをはなす角度はおよそ10°くらいに設定する。

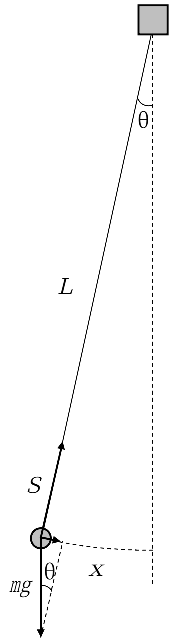
⑵　測定

① 振り子を静かにはなして，振れが安定してからストップウォッチを始動させる。10往復の時間をはかり，それを10で割って周期を求める。

② この操作を10回繰り返して，最小値と最大値を除いて平均を取る。

③ 周期が，２秒よりも若干大きく測定されればよい。

⑶　周期から重力加速度の大きさを求めるための実験値と理論値



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\theta \quad （復元力） \qquad x = L\theta$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\frac{x}{L} = -\frac{mg}{L}x \qquad \sin\theta = \theta \text{（}\theta\text{が十分小さいとき）}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{L}x = -\omega^2 x \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g} \qquad g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

例として，L＝1.00[m]のとき，実験結果から周期T＝2.01[Ｓ]が測定されたとすると，これらの値を最後の式に代入すれば，測定地点での重力加速度が9.76[m/Ｓ^2]なる。

重力加速度の大きさは 9.8［m/s²］？

重力とは，万有引力と地球の自転による遠心力との合力です。このため，北半球では，遠心力の影響を受けない北極点で最大となり，赤道付近で最小となります。また，標高が高くなると地球の中心からの距離が遠くなるので重力は小さくなります。このため、重力が変わると重力加速度も変化します。しかし厳密には，地球が回転楕円体であり，地球の内部構造が一様ではないため単純には語ることはできません。また，加速・減速するエレベーターや電車の中では，慣性力の影響があるため，静止および等速直線運動している場合と比べて，単振り子の周期が変化します。