

主体的・対話的で深い学びを実現する授業構想【数学科／数学Ⅲ】

1. 対象（実施を想定する学校・生徒の実態の概要）

進学校の高3理系で、習熟度別学習集団に編成したときの標準クラス。数学Ⅲの内容は終了しており、総合的な問題演習を行っているが、数学Ⅲを受験で必要としない生徒を集めたクラスである。

2. 単元名「微分法、導関数の応用（数学Ⅲの総合的な問題演習）」（全4時間）

3. 単元目標

関数の増加・減少、極大・極小などが、導関数と関連させて調べることができる。また、これらを調べることで関数の最大・最小や方程式の解の個数、不等式の定符号条件等がグラフや増減表等を利用して求めることができる。

4. 本時の目標

極値をもつ条件や極値の判定に導関数を用いて考察し、正しく求めることができる。

5. 授業展開

解決したい課題や問い

- 「極値とはどんなものか？（数式や数学の言葉で表現してみよう）」
- 問61 関数 $f(x) = x^3 - ax^2 + 3ax + 7$ について
- (1) 関数 $f(x)$ が極値をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。
 - (2) 関数 $f(x)$ が $x=1$ で極小値をもつとき、実数 a の値と極小値を求めよ。

考えるための材料

極値をもつ・極値をもたない条件	極値（極大値か極小値か）の判定
想定される活動	想定される活動
3次関数の場合、 $f'(x) = 0$ の判別式 D の符号で判定する。 $f'(x)$ の値が正→0→負（または負→0→正）と変化することから判定する（ $y = f'(x)$ のグラフ利用も）。 グラフや増減表を利用して判定する。	$f'(x) = 0$ となるときとする。 ただし、増減表を用いて $f'(x)$ の符号の変化を調べる。 または、 $f''(x)$ の符号を調べる。
既習事項であるが、個人及び対話的な活動の中から、知識を作り変え、数式や数学の言葉で整理してまとめる。	

対話と思考（対話を通じた協働的な問題解決のプロセス）

学習の流れ

- 予習＜個人で予習問題と問61に取り組む＝自分の考えをまとめる＞（家庭学習）
（予習1）極値とは？ （予習2）3次関数が極値をもつとは？ （予習3）3次関数が極値をもたないとは？
- 問題提示＜活動の焦点化＞（2分）
- グループ＜意見を交換する聴き合う関係＞（5分）
問61(1)の解法についてグループで共有。
グループでそれぞれ「極値をもつ条件」（1・2班）と「極値をもたない条件」（3・4班）について考える。
※ 数式や数学の言葉で表現しまとめる。
- ジグソー法＜逆の視点から理解することで、理解を深め意見を協働的にまとめる＞（5分）
違う課題について考えた者同士がペアを作り、お互いの意見を交換する。
グループに戻り、それぞれ発表をして、グループでの意見をまとめる。

学びのデザインシート（授業前）

- 全体での共有＜考えを作りかえる＞（5分）
グループの代表が説明をし、意見を共有し、まとめる。
- 個人学習＜自分の考えをまとめる＞（2分）
問61(2)の配布された解答例を使って自分の解答を添削する。
- グループ学習＜意見を交換し協働的に解決する＞（4分）
問61(2)の解答例の不足部分や追加部分についてグループで考える＜解答例の添削＞。
- 全体での共有＜意見を作りかえる＞（5分）
グループの代表が発表して、意見を共有し、まとめる。
- テスト＜自分の理解度を確認する＞（10分）
問62（類似問題）を個人で解く（理解度を確認）。
隣同士で採点をし、他者の解答を理解し、添削することで理解を深める。
- 振り返り＜振り返りと次の課題を生成＞（4分）
問題から気づいた点や感想をまとめる。
また、個人で意見をまとめ、グループで発表・共有し、次の課題を生成する。
- グループ学習＜協働的に解決＞（4分）
問63（類似の発展問題）について、解答の方針を個人で考え、グループで考える。
- 全体共有＜考えを作りかえ、次の課題を生成＞（4分）
グループの代表が発表し、問題の読み取りと解答の方針立てについて説明をする。
続きは家庭学習とする＜解けるかもといった期待を持たせ学習に向かわせる＞。
- 次時の予告（時間があれば実施）
予習プリントに取り組みさせる＜次時への期待感や疑問を与える＞。

学習の成果（予想される生徒のあらわれ）

- 極値をもつ・もたないについて、 $f'(x)$ の符号の変化を調べて考えることができる。
- $f'(x)$ の符号の変化を $y = f'(x)$ のグラフを利用して考えることができる。
- $f'(x) = 0$ であっても極値をもつとは限らず、極値をもつ条件や極大値・極小値の判定について、増減表または $f''(x)$ の符号を調べることで判定することができる。
- 極値について、 $f'(x)$ や $f''(x)$ の値や符号と関連付けて考えることができるようになる。

予想される生徒のあらわれに関する育成すべき資質・能力三つの柱からの分析

<p>① 知識・技能</p>	<ul style="list-style-type: none"> ○3次関数が極値をもつ・もたないを $f'(x) = 0$ の判別式を用いて判定できる。 ○極値をもつとき、$f'(x) = 0$ となることを理解している。
<p>② 思考力・判断力・表現力</p>	<ul style="list-style-type: none"> ○極値をもつ、もたないを増減の変化と関連付けて考察している。 ○極値の判定を $f'(x) = 0$ の前後の符号や $f''(x)$ の符号と関連付けて考察している。
<p>③主体性・学びに向かう力 協働性など</p>	<ul style="list-style-type: none"> ○事前の個人学習で自分の考えをまとめ、他者との意見交換の中で自分の考えを作り変え、協働的に課題を解決することができる。 ○3次関数だけでなく、4次関数や一般の関数への適用について疑問を持ち、評価表などの振り返りから自分の課題を明確にし、新たな疑問をもつといった次の学習に向かう力となる。

授業実践振り返りシート（授業前後）

解決したい課題や問い 「極値とはどんなものか？（数式や数学の言葉で表現してみよう）」

授業開始直後と授業終了時の学習課題に対する考え（あらわれ）を比較・分析することで、生徒の学習状況を把握し、授業設計診断4項目の視点に立って授業設計を見直す。

	授業開始直後の学習課題に対する考え	授業終了時の学習課題に対する考え
Aさん	< 3次関数 $y=f(x)$ が極値をもつ条件 > ・接線の傾きが0となる点 ・グラフの傾きの符号が変わるところ ・2次方程式 $f'(x)=0$ の判別式 $D > 0$	< 3次関数 $y=f(x)$ が極値をもつ条件 > ・ $y=f(x)$ の増減が変わる。→ $f'(x)$ の符号が変わる。 ・ $y=f'(x)$ のグラフが、 $y>0$ と $y<0$ の両方にある。 → $y=f'(x)$ のグラフが、 x 軸と異なる2点を共有 → $f'(x)=0$ の判別式 $D > 0$
Bさん	< 3次関数 $y=f(x)$ が極値をもたない条件 > ・2次方程式 $f'(x)=0$ が、重解または解なし → 判別式 $D \leq 0$	< 3次関数 $y=f(x)$ が極値をもたない条件 > ・ $y=f(x)$ が、単調に増加または減少する。 → $f'(x)$ が定符号（0以上または0以下）。 → $y=f'(x)$ のグラフが、 x 軸と共有点なしまたは接する（一瞬0となるが符号が変化しない）。 → $f'(x)=0$ の判別式 $D = 0$ または $D < 0$
Cさん	< 3次関数 $y=f(x)$ の極値の判定 > ・ $f'(x)=0$ となる。 ・ $f'(x)=0$ の判別式 $D > 0$	< 3次関数 $y=f(x)$ の極値の判定 > ・ $f'(x)=0$ となる。ただし、極値をもたない場合があるため、極大か極小かを確認。 ・ $f'(x)=0$ が重解のときは極値をもたない。 ・増減表や $f''(x)$ の符号で確認が必要。

授業設計の振り返り	
解決したい課題や問い	・極値をもつ条件を $D > 0$ と覚えている生徒は多かったが、関数の増減や導関数の符号に着目させ、理由を考えさせる効果があった。 ・増減や符号、グラフといった数学の言葉で表現させたが、十分ではなかった。 ・導関数の符号の変化とグラフの関係については、もう少し理解を深めさせたい。
考えるための材料	・極値をもつ条件ともたない条件といった逆の視点から考えさせることで、関数の増減や導関数の符号に着目させることができた。 ・極値をもたない条件が極値の判定を考えさせるためのよい教材となった。
対話と思考	・グループでの話し合いの時間が不足したため、延長したが、時間設定と時間管理をしっかりとする必要がある。 ・ジグソー法により極値をもつともたないといった、逆の視点からの情報共有ができ、理解が深まり、数学の言葉で表現できるようになった。
学習の成果	・極値をもつかもたないかを2次方程式 $f'(x)=0$ の判別式の符号で求めることは覚えていたが、関数の増減や導関数の符号を考えることで理解が深まったという感想が多かった。 ・なぜ極値の判定が必要かの理由が分かったという感想が多かった。 ・学んで理解したことをもっと数学の言葉で表現させたかった。