

主体的・対話的で深い学びを実現する授業構想【数学／数学A】

1. 対象（生徒の実態の概要）

普通科1年生40人のクラスであり、ほとんどの生徒が大学進学を希望している。本集団の特徴は、生徒同士の仲が良く欠席が少なく、授業に真摯に取り組む生徒がほとんどである。課題の提出状況も良好で、意欲的に学んでいる集団であると言える。他教科においても、良く努力し力を伸ばしている生徒が多い。

2. 単元名 整数の性質「カプレカー定数」 （全2時間）

3. 単元目標 事象を数学的に考察する力や、数学的な表現を用いて、事象を簡潔・明瞭・的確に表現し説明する力を養う。

4. 本時の目標
- ・各位が異なる3桁の数にカプレカー操作（ワークシート参照）を繰り返し、現れる数の特徴を発見することができる。また操作の結果、495（カプレカー数）に行き着くことを予想する。（数学の事象から問題を見出す力）
 - ・カプレカー操作を踏まえ、見通しを持って文字式に表現することができる。（事象を数学化する力、および数学の問題を解決する見通しを立てる力）
 - ・目的に応じて数・式を用いて、操作を繰り返すと495になることを説明（証明）することができる。（論理的に推論する力）
 - ・複数の説明を振り返り、共通点を探したり、発展の方向性を考えたりすることができる。（統合的・発展的に考える力）

5. 授業展開

解決したい課題や問い

ある操作（カプレカー操作）を繰り返したときに現れる数には、特徴があるだろうか。カプレカー操作を繰り返したときに現れる数は、495であることを証明してみよう。

考えるための材料

<p>・ワークシート（個人・班） カプレカー操作する。 現れる数の特徴を考察し、カプレカー定数を予想する。</p>	<p>・ワークシート（個人・班・全体） ・プロジェクター等 カプレカー定数を証明する。 数の表し方や証明方法を考察する。</p>	<p>・ワークシート（個人） 4桁のカプレカー数を発見する。 発展的な問題を提示。</p>
想定される活動	想定される活動	想定される活動
<p>カプレカー操作を用いて計算する。 班の中で現れる数を共有することで、10の位が常に9であることや、3桁の数が9の倍数である等の特徴に気が付く。 カプレカー定数495に気が付く。</p>	<p>3桁の数を文字式で表現する。 班内で様々な証明方法を考察する。 操作の結果、常に99の倍数が現れることに気が付く。現れる数は8種類だけなので、初期を文字式で表現できれば、証明が可能となる。 他者の意見を元に、証明方法を更に発展させる。</p>	<p>7回以内の操作で、4桁のカプレカー定数を発見する。 3桁の整数に同じ数を含む場合や、5桁の整数場合等、発展的な内容に関する新しい疑問を抱く。</p>

対話と思考（対話を通じた協働的な問題解決のプロセス）

●ワークシート① 8分

○カプレカー操作の提示、2回の操作（個人学習）

○対話（一班4人）→（クラス40人）

- ・操作の結果現れる数の情報を共有し、個人の結果だけでは発見が難しい特徴を見つける。
- ・特徴に関しては、授業参観シートの①を参照。
- ・何班か発表して、全体でも情報を共有する。

●ワークシート② 10分

○カプレカー操作3回目以降（個人学習）

○対話（4人）←必要に応じて繰り返す→（40人）

- ・操作の結果現れる数の情報を共有し、カプレカー数の証明に繋がる発展的な特徴を見つける。
- ・特徴に関しては、授業参観シートの②を参照。
- ・最初の設定の数次第では、ワークプリント①の時点でこれらの内容に気が付く場合もある。
- ・班で見つけた特徴を発表し、全体で共有する。

●ワークシート③ 4分

○カプレカー数の説明（一斉教授）

●ワークシート④ 22分

○証明（個人学習）→（4人）←繰り返す→（40人）→（必要に応じて一斉教授）

- ・証明方法を模索し、個人・班で検討する。（簡単に証明してしまう可能性も十分にある。）
- ・それぞれの班で出された意見や証明方法をプロジェクターを利用してクラス全体で共有し、必要に応じて班別で再検討する。説明に対して、補足や質問があると良い。
- ・最終的に、証明を正しく理解する。
- ・証明に関しては、授業参観シートの③を参照。

●ワークシート⑤ 6分

○本日の振り返り（個人→4人もしくは全体）

- ・授業終了時の学習の成果を、個人の言葉で記入する。
- ・班で、新たな疑問を共有する。

●ワークシート⑥（時間が余ったときに2枚目のワークシートを配布する。）

○4桁のカプレカー数を求める（個人学習）→（4人で確認）

○生徒が考えた発展的な内容

学習の成果（予想される生徒のあらわれ・生徒の言葉で表現・ワークシート5で記述させたい内容）

<授業のポイントや大切だと感じたこと>

- ・カプレカー操作を具体的に繰り返すことで、法則や性質に気が付いた。
- ・操作の結果現れる数は、99の倍数で、198～891の8種類に限られる。
- ・操作の結果、数種類しか出てこないのが不思議。その不思議さを証明できるのは驚きだ。
- ・整数を文字式で表して証明につなげることが大切だ。
- ・予想が正しいかどうか、証明する必要がある。
- ・自分の考えだけでなく、友人の考え方を聞くことは大切だ。

<新たな疑問>

- ・4桁のカプレカー数も求めたい。
- ・2桁・5桁はどうなっているのか気になる。
- ・3桁の自然数で、同じ数を含んで良い場合カプレカー数はどうなる？

育成すべき資質・能力三つの柱から上記のあらわれを評価するための視点（教員からの視点で）

①知識・技能	カプレカー操作を正しく行うことができる。 操作の過程を文字式で表すことができる。
②思考力・判断力・表現力	操作によって得られた数の特徴を発見することができる。 正しい証明方法について、考察することができる。
③主体性・学びに向かう力 協働性など	帰納的に考えることのよさを認識することができる。 班で積極的に情報交換し、粘り強く取り組むことができる。

授業実践振り返りシート（授業前後）

授業開始直後と授業終了時の学習課題に対する考え（あらわれ）を比較・分析することで、生徒の学習状況を把握し、授業設計診断4項目の視点に立って授業設計を見直す。

	授業開始直後の学習課題に対する考え	授業終了時の学習課題に対する考え
Aさん	<ul style="list-style-type: none"> ・操作の結果、偶然1回で結論に達してしまったため、何度も繰り返すことで、現れる数の特徴を探せるだろう。（実際に、多くの特徴を発見した。） ・3桁の数をすぐに記号で表し、証明もすぐにできるだろう。 	<ul style="list-style-type: none"> ・自分が発見できなかった法則を他の班から聞き、証明に活かせるのではないかと。聞くこと（対話）は重要だ。 ・証明できなかったのはなぜだ？授業が終わってしまったが月曜日まで持ち越しはいやだ。証明したい。
Bさん	<ul style="list-style-type: none"> ・グループで取り組むので楽しい。 ・現れる数が、3や9の倍数が多い。 ・792が有り得ないほど多く出てくる！ ・495（目的の数）になってる～。（喜び大きい） ・奇数から始めると遅い（操作回数が多い）のかな。 	<ul style="list-style-type: none"> ・他の人から聞く特徴に感動。聞けば理解できる。 ・だが495に行きつく証明は、自分には無理。 ・証明するためには、全部の3桁の自然数を調べなければいけないのでは？（友人から文字式を聞いた後もこたわる）
Cさん	<ul style="list-style-type: none"> ・当初、緊張して操作の方法を理解できない。焦る。落ち着いてからは、いろいろ発見できる。 ・いろいろな視点から証明方法を考えた方がよいだろう。 	<ul style="list-style-type: none"> ・操作後に現れる数の特徴（証明に繋がらない特徴）にこだわったため、うまく証明できなかった。 ・文字式の表し方はできたが、abcの細かな条件は、他の班の意見と教員の捕捉によって理解できて良かった。あとは組合せ書けばいいのかな？

授業設計の振り返り	
解決したい 課題や問い	<ul style="list-style-type: none"> ・カプレカー数495の発見、その過程において自然数の特徴を発見するところまでは、個人の活動と対話による活動の両方を通して、想定するところまで全員が達成することができた。 ・証明に関しては、数学Aの記数法や数学IIの証明を終えてから取り組んだ方がよい。
考えるための材料	<ul style="list-style-type: none"> ・操作の具体的な方法が理解できずに遅れた生徒が目立った。ワークシートの工夫や、教員からの具体的な指示で一斉に操作方法を理解できるものを用意したい。 ・自分の考えと他の人の考えを分けて記入するワークシートは、生徒の成長や評価が見えやすい。
対話と思考	<ul style="list-style-type: none"> ・情報交換により、現れる数の特徴に気が付きやすくなるので設定は良いと思う。 ・対話が活発に行われ、本人が考え直すきっかけになった場面も多いが、初めから思考せず聞けば良いという雰囲気の生徒も一部存在した。 ・証明できなかったということは、対話の時間が長すぎたのだろうか。
学習の成果	<ul style="list-style-type: none"> ・想定した活動の4分の3程度で授業が終わってしまったため、数学的な学びとしては、前半部分のみが達成、後半部分は翌週の授業に持ち越してしまった。 ・証明が終わらず翌週まで持ち越しになったことを残念がる生徒、後日、他の桁数について考え始める生徒など、新たな疑問を抱くことができた。